CHAPTER 5

# Triángulos isóceles y simetría

### **35.** Teoremas.

(1) **En un triángulos isóceles la bisectriz del ángulo en el vértice es al mismo tiempo la mediana y la altura.**

(2) **En un triángulos isóceles los ángulos de la base son congruentes.**

Sea $\triangle ABC$ (Figura 40) un triángulo isóceles y sea la línea $BD$ la bisectriz del ángulo $B$ en el vértice del triángulo. Se debe probar que esta bisectriz $BD$ también es la mediana y la altura.

Imaginemos que el diagrama se dobla a lo largo de la recta $BD$ de tal manera que el $\angle ABD$ cae sobre el $\angle CBD$. Entonces debido a la congruencia de los ángulos 1 y 2, el lado $AB$ caerá sobre el lado $CB$ y a causa de la congruencia de estos lados, el punto $A$ se encima en el punto $C$. Por lo tanto $DA$ coincide con $DC$, el ángulo 3 coincide con el ángulo 4 y el ángulo 5 con 6. Por lo tanto

$$DA = DC, \qquad \angle 3 = \angle 4 \quad \text{y} \quad \angle 5 = \angle 6.$$

Se sigue de que $DA = DC$ que $BD$ es la mediana. Se sigue de la congruencia de los ángulos 3 y 4 que estos ángulos son rectos y de ahí que $BD$ es la altura del triángulo. Finalmente los ángulos 5 y 6 en la base del triángulo son congruentes.

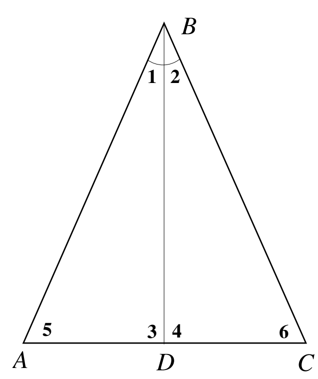


FIGURA 40

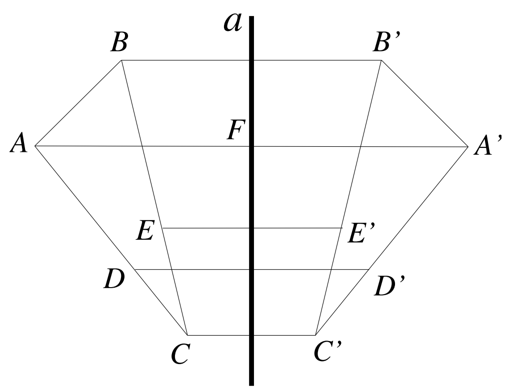


FIGURA 41

**36.** `Corolario.`

Vemos que en el triángulo isóceles $ABC$ (Figura 40) la misma línea $BD$ posee cuatro propiedades: es la bisectriz trazada desde el vértice, es la mediana a la base, es la altura tirada desde el vértice a la base y, finalmente, es la perpendicular levantada desde la base en su punto medio.

Como cada una de estas propiedades determina la posición de la línea $BD$ sin ambigüedad, entonces la validez de alguna de las propiedades implica todas las otras. Por ejemplo, *la altura tirada desde el vértice a la base de un triángulo isóceles es al mismo tiempo su bisectriz trazada desde el vértice, es la mediana a la base y es la perpendicular levantada en su punto medio.*

**37. Simetría axial.**

Si dos puntos ($A$ y $A'$, Figura 41) están situados en lados opuestos de una recta $a$, sobre la misma perpendicular a esta recta y a la misma distancia del pie de la perpendicular (i.e., si $AF$ es congruente con $FA'$), entonces tales puntos se llaman **simétricos** con respecto a la recta $a$.

Dos figuras (o dos partes de la misma figura) se llaman simétricas respecto a una recta si para cada punto de una de las figuras ($A, B, C, D, E, \ldots$, ver Figura 41) su punto simétrico respecto a la recta ($A', B', C', D', E', \ldots$) pertenece a la otra figura y viceversa. Una figura se dice que tiene un **eje de simetría** $a$ si esta figura es simétrica a sí misma respecto a la recta $a$, i.e., si para cada punto de la figura su punto simétrico también pertenece a la figura.

Por ejemplo, vimos que el triángulo isóceles $ABC$ (Figura 40) está dividido por su bisectriz $BD$ en dos triángulos (izquiero y derecho) que se pueden identificar doblando el diagrama a lo largo de la bisectriz. Se puede concluir que para cualquier punto que se tome en el lado izquierdo del triángulo isóceles, se puede hallar su punto simétrico en el lado derecho. Por ejemplo, sobre el lado

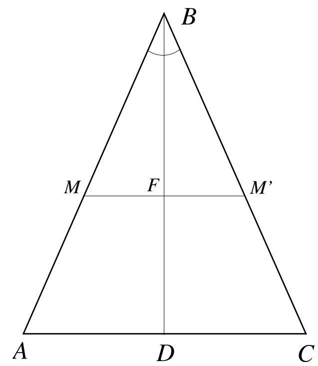


FIGURA 42

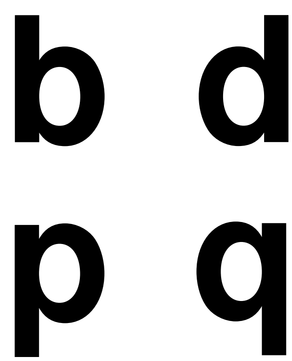


FIGURA 43

$AB$, tomemos un punto $M$. Marquemos sobre el lado $BC$ el segmento $BM'$ congruente con $BM$. Obtenemos el punto $M'$ en el triángulo simétrico a $M$ respecto al eje $BD$. En efecto $\triangle MBM'$ es isóceles ya que $BM = BM'$. Sea $F$ el punto de intersección del segmento $MM'$ con la bisectriz $BD$ del ángulo $B$. Entonces $BF$ es la bisectriz en el triángulo isóceles $MBM'$. Por el Apartado 35 también es la altura y la mediana. Por lo tanto $MM'$ es perpendicular a $BD$ y $MF = M'F$, i.e., $M$ y $M'$ están situados en los lados opuestos de $BD$, sobre la misma perpendicular a $BD$ y a la misma distancia de su pie $F$. Luego **en un triángulo isóceles, la bisectriz del ángulo en el vértice es un eje de simetría del triángulo**.

## **38.** Comentarios.

(1) Dos figuras simétricas pueden superponerse al rotar una de ellas en el espacio alrededor del eje de simetría hasta que la figura rotada cae otra vez en el plano original. Conversamente, si dos figuras se pueden identifica al girar el plano en el espacio alrededor de una recta en el plano, entonces estas dos figuras son simétricas respecto a esta recta.

FIGURA 44

(2) Aunque las figuras simétricas pueden superponerse, no son idénticas en su posición en el plano. Esto se debe entender en el siguiente sentido: para superponer dos figuras simétricas es *necesario* voltear una de ellas y por lo tanto sacarla del plano temporalmente; si, sin embargo, una figura debe permanecer en el plano, en general ningún movimiento puede identificarla con la figura con la que es simétrica respecto a una recta. Por ejemplo, la Figura 43 muestra dos pares de letras simétricas "b" y "d" y "p" y "q". Al rotar las letras dentro de la página se puede transformar "b" en "q" y "d" en "p", pero es imposible identificar "b" o "q" con "d" o "p" sin levantar los símbolos fuera de la página.

(3) La simetría axial se encuentra frecuentemente en la naturaleza (Figura 44).

**Ejercicios.**

(1) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo equilátero? ¿Y cuántos un triángulo isósceles que no es equilátero?
(2) ¿Cuántos ejes de simetría puede tener un cuadrilátero?
(3) Un **papalote** es un cuadrilátero simétrico respecto a una diagonal. Da un ejemplo de: (a) un papalote; (b) un cuadrilátero que no es un papalote, pero que tiene un eje de simetría.
(4) ¿Puede un pentágono tener un eje de simetría que pasa por dos de sus vértices? ¿y un eje que pasa por uno o ningún vértice?
(5) Dos puntos $A$ y$B$ están dados en el mismo lado de una recta $MN$. Encuentra un punto $C$ sobre $MN$ talque la recta $MN$ forma ángulos congruentes con la línea quebrada $ACB$.

`Demuestra estos teoremas:`

(6) En un triángulo isósceles dos medianas son congruentes, dos bisectrices son congruentes y dos alturas son congruentes.
(7) Si desde el punto medio de cada uno de los lados congruentes de un triángulo isósceles, el segmento perpendicular a este lado se levanta y se continúa a su intersección con el otro de los lados congruentes del triángulo, entonces estos dos segmentos son congruentes.

(8) Una recta perpendicular a la bisectriz de un ángulo corta segmentos congruentes en sus lados.
(9) Un triángulo equilátero es **equiángulo** (i.e., todos sus ángulos son congruentes).
(10) Los ángulos verticales son simétricos respecto a la bisectriz de sus lados suplementarios.
(11) Un triángulo que tiene dos ejes de simetría tiene tres ejes de simetría.
(12) Un cuadrilátero es un papalote si tiene un eje de simetría que pasa por un vértice.
(13) Las diagonales de un papalote son perpendiculares.